Title	実空間くりこみ群による動的臨界現象(「広領域の相転移物理学」研究会報告)
Author(s)	高野, 宏
Citation	物性研究 (1981), 37(1): 54-58
Issue Date	1981-10-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/90358
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

野氏の review を参照されれば一層現況がよく分ると考えられます。

文　献

1）Th. Niemeijer and J.M.J. van Leeuwen, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, C. Domb and M.S. Green, eds. (Academic Press, London, 1976), Vol. 6, p425.

2）A.A. Migdal, Z. Eksper. Teoret. Fiz. **69** (1975), 810, 1457.
L.P. Kadanoff, Ann Phys. **100** (1976) 359.

3）S.D. Drell, M. Weinstein and S. Yankielovicz, Phys. Rev. **D14** (1976) 487, 1627 ; **D16** (1977) 1769, **D17** (1978) 523.
R. Jullien, J.N. Fields and S. Doniach, Phys. Rev. **B16** (1977) 4889.
R. Jullien, P. Pfeuty, J.N. Fields and S. Doniach, Phys. Rev. **B18** (1978) 3568.

4）H.J. Hilhorst, M. Schick and J.M.J. van Leeuwen, Phys. Rev. **B19** (1979) 2749, Phys. Rev. Lett. **40** (1978) 1605.

5）Y. Yamazaki, H.J. Hilhorst and G. Meissner, J. Stat. Phys. **23** (1980) 609,
Y. Yamazaki and H.J. Hilhorst, Phys. Lett. **70A** (1979) 329.

6）R. Dekeyser and A. Stella, J. Stat. Phys. **23** (1980) 587.

実空間くりこみ群による動的臨界現象

東大・理　　高　野　　宏

臨界現象の研究に用いられるくりこみ群の方法[1]は，運動量空間でくりこみを行なう方法と実空間で行なう方法の２種に大別できる。運動量空間でのくりこみ群の方法は，現象論的ハミルトニアン（例えばG−L−Wハミルトニアン）から出発し，スケーリング，ユニバーサリティ，クロスオーバー等の臨界現象の一般的性質の理解，臨界指数等の評価に成功した。また，この方法は動的臨界現象にも用いられ，成功を収めている。[2] これに対し，実空間でのくりこみ群の方法は，ミクロなハミルトニアン（例えばイジング・ハミルトニアン）から出発する。このため，個々のモデル（ディスクリートな変数をもち，格子上で定義されているようなモデル）をそれぞれの次元で（ε−展開などを用いずに）直接扱えるという利点を持っている。また個

個のモデルの臨界点等のユニバーサルでない量の評価をすることもできる。実際，実空間くりこみ群の方法は２次元のイジング・スピン系に用いられ静的臨界現象に関し良い結果を与えている。[3] 最近，この実空間くりこみ群の方法を用いて，２次元キネティック・イジング模型の動的臨界現象を調べようという試みがいろいろ行なわれている。[4]

キネティック・イジング模型では，時刻 t においてイジング・スピンの配置が $\sigma_1 \cdots \sigma_N$ である確率を $P(\sigma_1, \cdots, \sigma_N ; t)$ とすると，この P の時間発展は次の様な方程式に従う。

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} P(\sigma_1, \cdots, \sigma_N ; t) \\
&= \sum_{j=1}^{N} [W_j(\sigma_1, \cdots, -\sigma_j, \cdots, \sigma_N) P(\sigma_1, \cdots, -\sigma_j, \cdots, \sigma_N ; t) \\
&\quad - W_j(\sigma_1, \cdots, \sigma_j, \cdots, \sigma_N) P(\sigma_1, \cdots, \sigma_j, \cdots, \sigma_N ; t)] \\
&= \sum_{j=1}^{N} (1 - F_j) W_j(\sigma_j) P(\sigma_1, \cdots, \sigma_N ; t) \,. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここで F_j は格子点 j にあるイジング・スピン σ_j を反転させる演算子である。 即ち，スピン配置の任意の関数 $f(\sigma_1, \cdots, \sigma_N)$ に対して，

$$F_j f(\sigma_1, \cdots, \sigma_j \cdots, \sigma_N) = f(\sigma_1, \cdots, -\sigma_j, \cdots, \sigma_N) \qquad (2)$$

となる。$W_j(\sigma_j)$ は， σ_j が反転した状態へ移る遷移確率で，一般に次のような detailed balance の条件を満たしていることが要請されるが，そのほかには特に $W_j(\sigma_j)$ の形に制約はない。

$$W_j(\sigma_j) P_{\rm st}(\sigma_1, \cdots, \sigma_j, \cdots, \sigma_N) = W_j(-\sigma_j) P_{\rm st}(\sigma_1, \cdots, -\sigma_j, \cdots, \sigma_N), \qquad (3)$$

ここで $P_{\rm st}(\sigma_1, \cdots, \sigma_N)$ は平衡状態の分布関数である。 以下で便利なように，(1)の方程式を，時間発展演算子 Γ を用いて一般的に次のように書いておく。

$$\partial_t P_t = \Gamma P_t \qquad (4)$$

(1)式では $\Gamma = \sum_{j=1}^{N} (1 - F_j) W_j(\sigma_j)$ である。

我々は，いろいろな量の緩和時間が，臨界点に近づくにつれてどのような異常性を示すかということに興味がある。例えば，磁化 $M = \sum_j \sigma_j$ の緩和時間 $\tau_{\rm M}$ は

$$\tau_{\rm M} = \int_0^\infty dt \, \frac{\langle M(t) M(0) \rangle}{\langle M(0) M(0) \rangle} \qquad (5)$$

で与えられる。ここで

$$< M(t)\,M(0) > = \mathrm{Tr}_{\{\sigma\}}\, M e^{\Gamma t} M P_{\mathrm{st}} \tag{6}$$

は平衡での相関々数である。τ_{M}は臨界点近傍で $|T-T_{\mathrm{c}}|^{-\varDelta}$ のような異常性を示し，臨界点 T_{c} では発散することが期待される。

分布関数の時間発展が(4)式で与えられる時，平衡状態で，２つの時刻における条件付き確率

$$G_t(\{\sigma\}\,|\,\{\sigma'\}) = e^{\Gamma t}\,\delta(\{\sigma\}\,|\,\{\sigma'\})\,P_{\mathrm{st}}(\{\sigma'\}) \tag{7}$$

を考える。ただし

$$\delta(\{\sigma\}\,|\,\{\sigma'\}) = \begin{cases} 1 & \{\sigma\} = \{\sigma'\}\ \text{の時} \\ 0 & \{\sigma\} \neq \{\sigma'\}\ \text{の時} \end{cases} \tag{8}$$

この $G_t(\{\sigma\}\,|\,\{\sigma'\})$ のそれぞれの時刻でのスピン配置 $\{\sigma\}$, $\{\sigma'\}$ を粗視化したものを $G'_t(\{\mu\}\,|\,\{\mu'\})$ とする。ここで $\{\mu\}$, $\{\mu'\}$ は粗視化したスピン（セル・スピン）の配置である。この G'_t をくりこまれた条件付き確率とみなして，この G'_t の時間発展演算子 Γ' を求めることにより，くりこみ変換が定義される。[5),6)] この際，固定点において，時間のスケールを $t \to t' = l^{-z}t$ のように変えて，Γ がくりこまれても不変なようにする。即ち，固定点で $l^z\Gamma' = \Gamma$ となるように z を決める。ここで l は，粗視化の際の長さのスケールの変化の割合で，z は dynamical critical exponent と呼ばれている。この z は，臨界点で系の長さのスケールを変えた時に，時間のスケールがどう変わるかを示す指数で，前述の指数 $\varDelta$ は $\varDelta = \nu z$ のように表わされる。ここで ν は相関距離 ξ の臨界指数（$\xi \sim |T-T_{\mathrm{c}}|^{-\nu}$）である。

(1)式のようなキネティック・イジング模型に対して，高温展開は $z = 2.0 \pm 0.05$[7)]，$z = 2.125 \pm 0.01$[8)]，モンテ・カルロ法は $z = 1.85 \pm 0.10$[9)] という結果を与えている。最近，くりこみ群とモンテ・カルロ法を組み合わせた方法で，$z = 2.22 \pm 0.13$[10)] という結果が得られている。

さて，実空間くりこみ群の方法で，上で述べたくりこみ変換の手続きを実行しようとすると，２つの問題点がある。ひとつは，粗視化に伴って生じる memory effect をどう処理するかであり，もうひとつは，どのような摂動展開を用いて計算を行なうかである。

memory effect の扱い方には次のような３つの方法が考えられるが，それぞれ困難な点がある。１番目は，G'_t の従う方程式を $\partial_t G'_t = \Gamma'_t G'_t$ の形に求める方法で，Γ'_t が時刻 t に依存する形になる。通常は，我々が見たいのは系の長時間でのふるまいなので，長時間の近似として $\Gamma' = \lim_{t\to\infty} \Gamma'_t$ とする。しかし，キネティック・イジング模型の場合は，用いる摂動展開が

本質的に短時間での展開となってしまい $t\to\infty$ の極限がとれない。2番目は，G'_t をラプラス変換して（$G'_z=\int_0^\infty dt\,e^{-zt}\,G'_t$），$zG'_z=\Gamma'_z\;G'_z+G'_{t=0}$ の形に方程式を求める方法である。この場合 Γ'_z が周波数 z に依存する。これは t を用いて表わしてみれば convolution の形になっており Non-Markovian effect を表わしている。この場合も，系の長時間でのふるまいを見る，(5)式のような量を見るという理由で，$\Gamma'=\lim_{z\to 0}\Gamma'_z$ という Markov 近似を行なう。この方法には，Γ' に非局所的な時間発展演算子が現われるという困難がある。3番目は，Mazenko の方法[5]で，上記のような t－依存性，z－依存性が現われないように，くりこみ変換を選ぶというものである。しかし，この方法で用いる摂動展開の方法には，以下に述べるような困難が存在する。

摂動展開に関する問題とは，静的臨界現象の場合に，実空間くりこみ群の方法で通常用いる cumulant expansion（セル内の相互作用は厳密に扱い，セル間の相互作用は摂動的に扱う）は，動的臨界現象の場合には用いることができないということである。[6] もし，cumulant expansion を用いると出発点の Γ はセル内の相互作用に関し無限次の情報を含んでいるのに，くりこみ変換で得られる Γ' にはくりこまれた相互作用に関し有限次の情報しか含まれていない。くりこみ変換をくり返し実行するためにはこの Γ' をもとの Γ の形に復元しなければならないが，含まれている情報の次数がそろっていないので ambiguity が生じてしまう。

ここでは，memory effect の扱い方としては2番目の convolution 型の方法を用いた。摂動展開としては，Betts ら[11] によって静的臨界現象の場合に用いられた高温展開の方法を用いた。この方法は，イジング・スピン間の最隣接相互作用の強さを K_1 とする時，$v_1\equiv\tanh K_1$ に関する展開を行なうもので，すべての相互作用を平等に（セル内，セル間と区別せずに）扱っている。

三角格子で摂動の2次までの範囲の計算で次のような結果が得られた。

memory effect により，Γ' の中に非局所的なスピン反転の演算子の項が現われた。例えば N 個の格子点のうちの任意の2個の格子点（その間の距離は限定されていない）で同時にスピンが反転するような演算子である。しかし，これらの非局所的（最隣接等に限定されていないという意味）な項は，摂動の2次までの計算では，固定点のまわりで irrelevant であることが示せる。

最隣接相互作用のみの場合の臨界点は $v_{1c}\simeq 0.30$（厳密解は $v_{1c}\simeq 0.27$），臨界指数は $1/\nu\simeq 0.99$（厳密解は $1/\nu=1$），$z\simeq 2.23$ となった。 これらの数値は，知られている結果と良く一致している。

さらに高次の計算は，非局所的な項をより直接的に扱わなければならないので，非常に困難

高野　宏

である。

参　考　文　献

1) *Phase Transitions and Critical Phenomena,* edited by C. Domb and M.S. Green (Academic, New York 1976), Vol. 6.

2) P.Hohenberg and B.I. Halperin, Rev. Mod. Phys. **49** (1977), 435.

3) T. Niemeijer and J.M.J. van Leeuwen, in Ref. 1).

4) Refs. 5) and 6) , and references therein. M. Suzuki et al. Prog. Theor. Phys. **61** (1979), 864.

5) G.F. Mazenko et al., Phys. Rev. **B22** (1980), 1263 ; 1275.

6) U. Deker and F. Haake, Z. Physik **B36** (1980), 379.

7) H. Yahata and M. Suzuki, J. Phys. Soc. Japan **27** (1969), 1421.

8) Z. Racz and M.F. Collins, Phys. Rev. **B13** (1976), 3074.

9) E. Stoll, K. Binder and T. Scheider, Phys. Rev. **B8** (1973), 3266.

10) J. Tobochnik, S. Sarker and R. Cordery, Phys. Rev. Lett. **46** (1981), 1417.

11) D.D. Betts et al., Physica **98A** (1979), 27.